Đề bài

Cho trường vector:

$$\vec{F}(x, y, z) = (3y,\ -xz,\ yz^2).$$

Mặt cong S:

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad z \le 2,$$

định hướng xuống.
Tính lưu lượng (flux) của $\vec{F}$ qua S theo hai cách:

1. Tính trực tiếp tích phân mặt.
2. Sử dụng công thức Gauss (trong đề thường gọi nhầm là Stokes).

Phần A — Tính trực tiếp tích phân mặt

Bước 1 — Công thức tích phân mặt dạng $z = f(x, y)$

Với mặt $z = f(x, y)$ và định hướng xuống:

$$d\vec{S} = (f_x, f_y, -1)\, dx\, dy.$$

Bước 2 — Tính đạo hàm riêng

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad f_x = x, \quad f_y = y.$$

Do đó:

$$d\vec{S} = (x, y, -1)\, dx\, dy.$$

Bước 3 — Thay $\vec{F} \cdot d\vec{S}$

$$\vec{F} = (3y,\ -xz,\ yz^2), \quad z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

$$-xz = -\tfrac{x}{2}(x^2 + y^2), \quad yz^2 = \tfrac{y}{4}(x^2 + y^2)^2.$$

Tích vô hướng:

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = 3yx + \left(-\tfrac{x}{2}(x^2 + y^2)\right) y - \tfrac{y}{4}(x^2 + y^2)^2.$$

Bước 4 — Nhận xét

Mỗi hạng đều chứa y. Miền chiếu D: $x^2 + y^2 \leq 4$, đối xứng qua trục x. Hàm lẻ theo y trên miền đối xứng $\Rightarrow$ tích phân bằng 0.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Kết quả cách (A): 0.

Phần B — Dùng định lý Gauss

Bước 1 — Đóng mặt

Mặt S chưa kín, ta đóng bằng mặt phẳng $z = 2$. Gọi S_1: paraboloid (định hướng xuống), S_2: mặt phẳng $z = 2$ (định hướng lên).

Bước 2 — Định lý Gauss

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F})\, dV.$$

Bước 3 — Tính divergence

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3y) + \frac{\partial}{\partial y}(-xz) + \frac{\partial}{\partial z}(yz^2) = 0 + 0 + 2yz.$$

Bước 4 — Nhận xét đối xứng

Miền V đối xứng theo y. $2yz$ là hàm lẻ theo y.

$$\iiint_V 2yz\, dV = 0.$$

Bước 5 — Suy ra

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Bước 6 — Tính flux qua S_2

Trên $z = 2$, pháp tuyến $\vec{n} = (0, 0, 1)$:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = yz^2 = 4y.$$

$$\iint_{S_2} 4y \, dA = 0 \quad \text{(miền tròn đối xứng)}.$$

Do đó:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Kết luận

Lưu lượng của $\vec{F}$ qua S bằng 0.

Tóm tắt bản chất

Ý	Nhận xét
Cách trực tiếp	Dùng $z = f(x, y)$, soi tính lẻ
Cách định lý	Thực chất là Gauss, không phải Stokes
Ý đồ đề	Kiểm tra đối xứng + tư duy hình học
Bẫy	Tính tích phân dài dòng không cần thiết